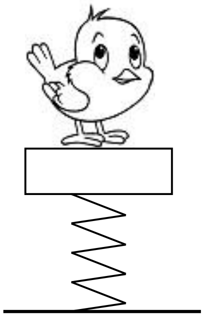
Решения задач Межрегиональной олимпиады школьников на базе ведомственных образовательных организаций в 2018-2019 учебном году

11 класс

Вариант 1

Задача 1. (20 баллов). На чаше весов массы M, закрепленной на пружине, сидит птичка массы m. Сразу после того, как птичка улетела в горизонтальном направлении, чаша стала колебаться по вертикали с амплитудой колебаний A. Найдите период колебаний. Массой пружины и затуханием колебаний пренебречь, чаша весов может двигаться только по вертикали. Ускорение свободного падения g.



Решение:

Когда птичка сидит на чаше, система находится в покое, и

$$(m+M)g = kx,$$

где k – жесткость пружины, x – ее сжатие. Положение равновесия чаши (сжатие пружины) без птички x_0 находится из условия равенства сил тяжести и упругости

$$Mg = kx_0$$

Амплитуда колебаний $A = x - x_0$. Период колебаний чаши на пружине

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}.$$

Из этих соотношений получаем $T = 2\pi\sqrt{\frac{MA}{mg}}$.

Задача 2. (20 баллов). После орудийного выстрела снаряд массой 40 кг разорвался в некоторой точке траектории на два осколка, разлетевшихся с импульсами $p_1 = 1{,}8\cdot10^4$ кг·м/с и $p_2 = 0{,}6\cdot10^4$ кг·м/с. Импульсы осколков направлены под углом $\alpha = 60°$ друг к другу. Определите, при каком отношении масс осколков выделившаяся при взрыве кинетическая энергия будет минимальной и найдите эту энергию.

Решение:

Пусть m_1 и m_2 –массы осколков, $M = m_1 + m_2$ – первоначальная масса снаряда.

По закону сохранения импульса

$\overrightarrow{p_0} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$ или $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2\cdot p_1\cdot p_2\cdot\cos\alpha$

Кинетическая энергия до и после взрыва соответственно равны:

$E_0 = \frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1\cdot p_2\cdot\cos\alpha}{2(m_1+m_2)}$, $E_{кон} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}$

Выделившаяся при взрыве кинетическая энергия:

$E = E_{кон} - E_0 = \left(\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}\right) - \frac{p_1^2 + p_2^2 + 2p_1\cdot p_2\cdot\cos\alpha}{2(m_1+m_2)}$.

После преобразования будем получим: $E = \frac{1}{2M}\left(p_1^2\cdot k + p_2^2\frac{1}{k} - 2p_1\cdot p_2\cdot\cos\alpha\right)$, где $k = \frac{m_2}{m_1}$

Для определения минимальной энергии находим производную энергии по k и приравниваем её к нулю.

$E'_k = \frac{1}{2M}\left(p_1^2 - p_2^2\frac{1}{k^2}\right) = 0.$

Следует, что $k = \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{3}$.

Подставим найденное значение k в выражение для энергии E, получим

$E_{min} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot (1-\cos\alpha)}{M}$ =1,35·10^6 Дж.

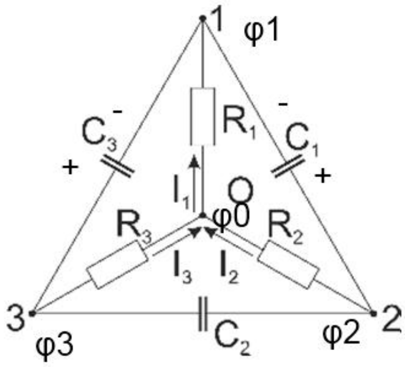
Итого: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{1}{3}$, $E_{min} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot (1-\cos\alpha)}{M}$ =1,35·10^6 Дж.

Задача 3. (20 баллов). В схеме, изображенной на рисунке, известны сопротивления, они одинаковы $R_1 = R_2 = R_3 = R$, известны токи I_1, I_2, I_3 и емкости конденсаторов C_1, C_2, C_3. Найдите заряд на конденсаторе C_1.

Решение:

Нарисуем рисунок, соответствующий условиям задачи и обозначим на нём потенциалы точек – узловых соединений схемы. Благодаря тому, что на рисунке указано направление токов, протекающих в цепи, возможно указать какая из пластин конденсатора заряжена положительным зарядом, а какая отрицательным, а также соотношение между потенциалами.

Так: $\varphi_2 > \varphi_0 > \varphi_1$.



Ток I_2 порожден разностью потенциалов $\varphi_2 - \varphi_0$, следовательно, записав закон Ома для участка цепи получим:

$$\varphi_2 - \varphi_0 = I_2 R, \qquad (1).$$

Аналогично для тока I_1:

$$\varphi_0 - \varphi_1 = I_1 R \qquad (2).$$

Сложим выражения (1) и (2):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = R(I_1 + I_2).$$

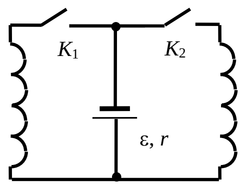
Кроме того заметим, что разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ обуславливает появление заряда на пластинах конденсатора C_1. В соответствии с формулой для емкости конденсатора:

$$C = \frac{q}{U}.$$

Подставив вместо U, разность потенциалов $\varphi_2 - \varphi_1$ окончательно имеем:

$$q_1 = C_1 R(I_1 + I_2).$$

Задача 4. (20 баллов). Две одинаковые катушки индуктивности подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной ЭДС ε и внутренним сопротивлением r (см. рис.). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. Затем замыкают сначала ключ K_1, а потом ключ K_2. Определить силу тока, протекающего через ключ K_1 в момент замыкания ключа K_2, если известно, что после замыкания ключа K_2 установившийся ток через ключ K_1 в два раза больше, чем установившийся ток через ключ K_2. Активными сопротивлениями катушек пренебречь.



Решение:

После замыкания ключа K_2 напряжения на концах обеих катушек в любой момент времени будут равны друг другу. Так как активные сопротивления катушек равны нулю, это условие записывается в виде равенства ЭДС самоиндукции:

$$L\frac{dI_1}{dt} = L\frac{dI_2}{dt},$$

где L – индуктивности катушек, I_1 и I_2 – силы токов в катушках.

Отсюда:

$$I_1(t) - I_2(t) = \text{const}, \qquad (1)$$

то есть, при замкнутых ключах разность абсолютных значений сил токов в катушках остается неизменной *в любой момент времени*.

Силу тока через первую катушку в момент замыкания ключа K_2 обозначим через I_0:

$$I_1(t{=}0) = I_0,$$

(I_0 является искомой величиной задачи).

В этот же момент времени сила тока через вторую катушку равна нулю:

$$I_2(t{=}0) = 0.$$

Согласно (1) получим:

$$I_1(t) - I_2(t) = I_1(t{=}0) - I_2(t{=}0) = I_0 = \text{const}. \qquad (2)$$

В установившемся режиме через катушки будут течь постоянные токи, которые обозначим через $I_{уст.1}$ и $I_{уст.2}$. При этом разность потенциалов на концах катушек равна нулю, и, следовательно, сила тока через источник $I_{ист}$ равна:

$$I_{ист} = \varepsilon/r.$$

По правилу Кирхгофа для сил токов имеем:

$$I_{уст.1} + I_{уст.2} = I_{ист} = \varepsilon/r. \qquad (3)$$

Кроме того, по условию задачи:

$$I_{уст.1} / I_{уст.2} = 2. \qquad (4)$$

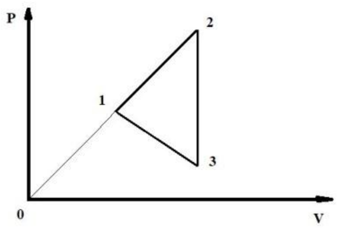
Из уравнений (3) и (4) находим:

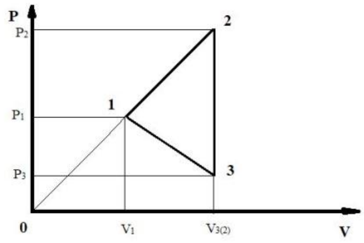
$$I_{уст.1} = 2\varepsilon/(3r),\ \ I_{уст.2} = \varepsilon/r.$$

В соответствии с (2) находим искомую величину:

$$I_0 = I_{уст.1} - I_{уст.2} = \varepsilon/(3r).$$

Задача 5. (20 баллов). Найдите работу А, совершаемую одним молем (υ=1) идеального газа в цикле (1⟼2⟼3⟼1), состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (см. рис.). Точки 1 и 2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (на диаграмме PV). Температуры T_1 и T_2 в соответствующих точках 1 и 2 известны. $T_3 = T_1$.





Решение:

Даны два рисунка: исходный (левый) из условия задачи и подготовленный для решения задачи (правый), которым мы будем в дальнейшем пользоваться.

Работа, совершаемая газом на каждом участке цикла, численно равна площади трапеции, заключенной между графиком процесса, осью V, и двумя перпендикулярами, опущенными из начальной и конечной точек процесса на ось V. Работа, совершаемая газом, положительна, если газ в соответствующем процессе (1⟼2, например) расширялся. Работа, совершаемая газом, отрицательна, если газ в соответствующем процессе (3⟼1, например) сжимался. Два последних утверждения легко доказываются в общем виде. Работа, совершаемая газом за весь цикл, численно равна площади фигуры (в нашем случае это треугольник 1,2,3), ограниченной графиками процессов, составляющих цикл.

Работа $A_{1\mapsto 2}$, совершаемая газом на участке цикла (1⟼2) равна

$$A_{1\mapsto 2} = \frac{1}{2}\,[P_1 + P_2][V_{3(2)} - V_1]. \qquad (1)$$

Работа $A_{3\mapsto 1}$, совершаемая газом на участке цикла (3⟼1) равна

$$A_{3\mapsto 1} = -\,\frac{1}{2}\,[P_1 + P_3][V_{3(2)} - V_1]. \qquad (2)$$

При вычислении работ $A_{1\mapsto 2}$ и $A_{3\mapsto 1}$ была применена хорошо известная формула для вычисления площади трапеции: площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований трапеции на высоту трапеции.

Работа $A_{2\mapsto 3}$, совершаемая газом на участке цикла (2⟼3) равна нулю (изохорический процесс).

Таким образом, работа, совершаемая газом за весь цикл, равна

$$A = A_{1\mapsto 2} + A_{3\mapsto 1} = \frac{1}{2}\,[P_1 + P_2][V_{3(2)} - V_1] - \frac{1}{2}\,[P_1 + P_3][V_{3(2)} - V_1]. \qquad (3)$$

Раскрывая в последнем выражении скобки, и, применяя (где это уже можно) уравнение Клапейрона-Менделеева (для данного моля газа)

$$PV = RT, \qquad (4)$$

преобразуем выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл

$$A = \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3 - P_2][V_1] =$$

$$= \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3/P_1 - P_2/P_1][P_1V_1] =$$

$$= \frac{1}{2}\,[RT_2 - RT_1] + \frac{1}{2}\,[P_3/P_1 - P_2/P_1][RT_1]. \qquad (5)$$

Из рисунка можно получить дополнительные соотношения между термодинамическими величинами в точках цикла 1,2,3. Из двух подобных прямоугольных треугольников, вершины которых «обозначены точками» (0,2,$V_{3(2)}$) и (0,1,V_1) можно получить

$$\frac{P_2}{V_{3(2)}} = \frac{P_1}{V_1}\,. \tag{6}$$

Так, как точки 1 и 3 лежат (по условию) на одной изотерме (она из-за ненадобности не нарисована на рисунке), можно записать

$$P_1V_1 = P_3V_{3(2)} \tag{7}$$

Из выражений (6) и (7) следует

$$P_1 = \sqrt{P_2P_3}$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_3}{P_1} = \frac{P_1}{P_2} \tag{8}$$

Из изохоры (2⟼3) получаем

$$\frac{P_2}{T_2} = \frac{P_3}{T_3} \tag{9}$$

или, что то же самое,

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{T_2}{T_3} \equiv \frac{T_2}{T_1} \tag{10}$$

Выражение (10) с учетом выражения (8) можно преобразовать

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{P_2}{P_1}\frac{P_1}{P_3} = \left[\frac{P_2}{P_1}\right]^2 = \left[\frac{P_1}{P_3}\right]^2 = \frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{P_2}{P_1} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\,, \quad \frac{P_3}{P_1} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}. \tag{11}$$

После подстановки выражений (11) в выражение (5) и, после простых преобразований, получаем окончательное выражение для работы, совершаемой газом за весь цикл

Итого: $$A = \frac{RT_1}{2}\left[\frac{T_2}{T_1} - 1\right]\left[1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}\right].$$